13. Взаимно положение на две прави в равнината

Нека $K = Oxy$ е афинна координатна система.

Нека правите l_1 и l_2 имат общи уравнения:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тогава е в сила следната теорема:

Теорема 1: Правите l_1 и l_2
а) се пресичат точно когато $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$;
б) са успоредни точно когато $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;
в) съвпадат точно когато $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.
Доказателство:
а) От предната глава ни е известно, че векторите $\mathbf{p}_1(-B_1, A_1)\|l_1$ и $\mathbf{p}_2(-B_2, A_2)\|l_2$. Правите l_1 и l_2 са успоредни или съвпадат точно когато тези вектори са колинеарни. Условието за това е:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

т.е. правите се пресичат, когато равенството не е изпълнено.
в) Нека векторите p_1 и p_2 са колинеарни, тогава правите l_1 и l_2 са успоредни или съвпадат. От условието имаме

$$A_1 = \rho A_2,\ B_1 = \rho B_2,$$

където ρ е коефициента на пропорционалност. Като заместим в първото уравнение получаваме:

$$l_1 : \rho(A_2x + B_2y) + C_1 = 0.$$

Ако правите се сливат, то изразът $A_2x + B_2y$ от уравненията на l_1 и l_2 може да се елиминира. Това води до $C_1 = \rho C_2$.
Обратно, ако е изпълнено $A_1 = \rho A_2$, $B_1 = \rho B_2$, $C_1 = \rho C_2 (\rho \neq 0)$, то двете прави притежават еднакви уравнения, което показва, че съвпадат. С това доказахме в).
б) Следва чрез допускане на противното.

Нека сега координатната система е ортонормирана.
Правите l_1 и l_2 сключват съответно ъглови коефициенти:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},\ k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Можем да формулиране следната теорема:

Теорема 2: Две прави l_1 и l_2 (не усппордни на оста Oy) с ъглови коефициенти k_1 и k_2 са:
а) успоредни (или съвпадат), точно когато $k_1 = k_2$;
б) прерпендикулярни, точно когато $1 + k_1k_2 = 0$.
Доказателство:
а) Правите са успоредни точно когато $p_1 \| p_2$, или

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ или}$$
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

т.е. $k_1 = k_2$.
б) Правите са перпендикулярни точно когато $p_1 \perp p_2$, или

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$
$$1 + \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = 0,$$

или $1 + k_1k_2 = 0$, което трябваше да се докаже.